UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRAGAN S. POPOVIĆ

ELASTIČNO RASEJANJE FOTON-SKALARNA ČESTICA U KEMMER-DUFFIN-ovom FORMALIZMU

— MAGISTARSKI RAD —

INSTITUT ZA FIZIKU
BEOGRAD — 1975. GODINA

"TEORIJA S ELEGANTNOM MATEMATIKOM IMA VEĆE ŠANSE DA SE POKAŽE TAČNOM, NEGO RUŽNA TEORIJA, KOJA OBJAŠNJAVA NEKOLIKO EKSPERIMENTALNIH REZULTATA"

P. A. M. Dirac

Ovaj rad uradjen je u Laboratoriji za teorijsku fiziku Instituta za fiziku - Beograd.

Ovom prilikom želim da izrazim najtopliju zahvalnost profesoru Dr Zvonku Mariću, upravniku Laboratorije za teorijsku fiziku, naučnom rukovodiocu ovog rada, za korisne sugestije, stalne diskusije i svesrdnu pomoć koju mi je pružao tokom izrade rada. Naročito želim da se zahvalim kolegi Mr B. Dragoviću na ukazanoj pomoći u svim etapama rada. Zahvaljujem se takodje svim kolegama iz Laboratorije za teorijsku fiziku koji su pokazali interesovanje za ovaj rad, a posebno kolegi Mr M. Kuliću.

Beograd, marta 1975.

S A D R Ž A J

UVODNE OZNAKE I NOTACIJE

Tokom celog rada koristićemo takozvani prirodni sistem jedinica u kome je

$$\hbar = c = 1$$

Indeksi označeni grčkim slovima $\mu, \nu, \lambda \ldots$ uzimaju vrednosti 0, 1, 2, 3.

Za metrički tenzor uzećemo tenzor $g_{\mu\nu}$ sa komponentama

$$g_{00} = 1 \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \qquad g_{\mu\nu} = 0 \qquad \mu \neq \nu$$

Komponente četvoro-vektora dajemo u oblik

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x})$$

Skalarni proizvod četvoro-vektora je

$$xy \equiv x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - \vec{x}\vec{y}$$

D' Alambert-ov operator je uzet kao

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\lambda} \partial^\lambda \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Oznake *, T i + označavaju kompleksnu konjugaciju, transponovanje matrice i $A^+ = (A^*)^T$.

Koristićemo konvenciju o sumiranju ponovljenih indeksa

$$a_\nu b^\nu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

U V O D

U periodu od 1954. do 1956. godine pojavilo se nekoliko saopštenja [21, 22, 23, 24] o neuobičajenim dogadjajima primećenim u fotografskoj emulziji koja je bila izložena kosmičkom zračenju na velikoj visini. Svi ovi dogadjaji imaju za posledicu konverziju multifotonskog snopa, unutar emulzije, u elektronske parove. Analizirajući ove dogadjaje, nijedan od autora nije uspeo da da zadovoljavajuće objašnjenje. Od tada više nije bilo saopštenja o novim dogadjajima ovog tipa, dok su pomenuti dogadjaji ostali neobjašnjeni.

G. B. Collins i grupa autora [25] 1973. godine uporedila je ove dogadjaje (zabeleženo je pet dogadjaja) i pokazala zašto ih je teško objasniti pomoću poznatih fizičkih procesa. Oni su pokazali da jedina dva fizička procesa koja dolaze u obzir za objašnjenje ovih dogadjaja ne mogu da opišu datu eksperimentalnu situaciju. To su: 1) ekstremne statističke fluktuacije konvencionalne elektromagnetske kaskade inicirane jednim fotonom, i 2) multiprodukcija fotona iz raspada π°-mezona. Kao najznačajniju karakteristiku ovih dogadjaja istakli su odsustvo bilo koje naelektrisane čestice u blizini snopa, što sugerira da je snop iniciran neutralnom česticom.

S druge strane J. P. Vigier i grupa autora [26] objašnjavajući anomalni crveni pomak, predložila je uvodjenje nove lake čestice koja bi imala spin-0 i bila neutralna, a koja bi sa fotonom bila u jakoj interakciji. Interakcija mora biti uvedena tako da zadovolji tri važna uslova koje nameće eksperiment:

A. - jako rasejanje fotona u napred, da bi se objasnio tačkasti karakter udaljenih izvora.

B. - konstantni energetski gubitak $\langle \delta z \rangle_\gamma$ po sudaru za 10^{10} Hz $< \nu < 10^{15}$ Hz, jer su primećeni anomalni crveni pomaci istog reda za bilo koju učestanost u ovim granicama.

C. -kompatibilnost sa kvantnom elektrodinamikom, tj. da proces $\gamma + \phi \rightarrow \gamma + \phi$ iz koga sledi $\gamma + \gamma \rightarrow \phi + \phi$ ne vodi neželjenoj reakciji tipa $e^+ + e^- \rightarrow \phi + \phi$

Oba ova primera sugeriraju da je moguća pretpostavka da u nekim slučajevima foton ne interaguje na nama dobro poznat način (elektromagnetske interakcije) već da ispoljava i druge osobine tj. mogućnost da sa nekim česticama interaguje jako ili slabo. U ovom radu biće razmatrana upravo jedna takva mogućnost. Razmatraćemo elastično rasejanje fotona na hipotetičkoj neutralnoj skalarnoj čestici. Skalarnu česticu kao i foton, tretiraćemo u Duffin-Kemmer-ovom formalizmu, jer nam ovaj formalizam daje mogućnost da uvedemo struju čestica, iako su ove neutralne, dok skalarna čestica u ovom formalizmu, iako ima spin-0, može imati magnetski moment.

U prvom delu rada izložićemo detaljno Duffin-Kemmer-ov formalizam, koristeći metriku koja je danas uglavnom u upotrebi, dok se u standardnim referencama [1, 2, 3, 4, 6] koristi Pauli-eva metrika. Drugi deo rada je posvećen izračunavanju efikasnog preseka, u drugom redu teorije perturbacije, elastičnog rasejanja fotona na neutralnoj skalarnoj čestici.

U zaključku ćemo diskutovati ponašanje diferencijalnog efikasnog preseka koji smo dobili. Dobijeni rezultat ćemo uporediti sa rezultatom J. P. Vigier-a i grupe autora [26] i razmotriti izvore neslaganja.

1. DUFFIN-KEMER-ov FORMALIZAM

Duffin-Kemmer-ov [1, 2] formalizam je opis polja spina-0 i spina-1 u kome su jednačine kretanja diferencijalne matrične jednačine prvog reda koje po svom obliku podsećaju na Dirac-ovu jednačinu. Istorijski gledano, interesovanje za ovaj formalizam je naglo opalo kada je pokazana ekvivalentnost ovog formalizma sa formalizmom Klein-Gordon-a (koji je jednostavniji) i to u slučaju slobodnih polja, polja u interakciji sa elektromagnetskim [3, 11] , i u slučaju polja u interakciji sa Dirac-ovim poljem [12] . Medjutim, u poslednje vreme neki autori [10, 13] tvrde da ova ekvivalentnost nije sasvim korektna, pa otuda i ponovno intereosvanje za ovaj formalizam.

U standardnom formalizmu (misli se na Klein-Gordon-ov i Proca) gustina Lagrange-ove funkcije se konstruiše na taj način da jednačine kretanja koje dobijamo iz Lagrange-ove funkcije budu diferencijalne jednačine drugog reda. Poznato je iz teorije diferencijalnih jednačina da se jednačine višeg reda mogu svesti na sistem diferencijalnih jednačina prvog reda, uzimajući za nove promenljive polaznu promenljivu i njene izvode.

U ovoj glavi sprovešćemo proceduru linearizacije jednačina polja spina-0 i spina-1, zatim izvršiti proceduru kvantovanja slobodnog skalarnog polja i na kraju naći komutatore polja i njihove propagatore.

1.1 Jednačine prvog reda

Podjimo od Klein-Gordon-ove jednačine i izvršimo linearizaciju ove diferencijalne jednačine drugog reda

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0$$

$$\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi \qquad \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu = 0$$

$$\partial^\mu \varphi_\mu + m^2 \varphi = 0$$

dobili smo sistem od 5 diferencijalnih jednačina prvog reda po φ i φ_μ

$$\begin{aligned} \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu &= 0 \\ \partial^\mu \varphi_\mu + m^2 \varphi &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Uvedimo nove oznake:

$$\varphi = \psi_4 \qquad\qquad \psi_\mu = \frac{1}{m}\varphi_\mu$$

sistem (1.1) se piše:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi_4 - m\psi_\mu &= 0 \\ \partial^\mu \psi_\mu + m\psi_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Napišimo eksplicitnije sistem (1. 2)

$$\begin{aligned} \partial_0\psi_4 + 0 + 0 + 0 - m\psi_0 &= 0 \\ 0 + \partial_1\psi_4 + 0 + 0 - m\psi_1 &= 0 \\ 0 + 0 + \partial_2\psi_4 + 0 - m\psi_2 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 + \partial_3\psi_4 - m\psi_3 &= 0 \\ \partial_0\psi_0 - \partial_1\psi_1 - \partial_2\psi_2 - \partial_3\psi_3 + m\psi_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ako sada uvedemo petokomponentnu kolonu-matricu

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\partial_0\psi_4 \\ \frac{1}{m}\partial_1\psi_4 \\ \frac{1}{m}\partial_2\psi_4 \\ \frac{1}{m}\partial_3\psi_4 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

tada se sistem (1.3) može pisati u kompaktnom obliku matrične jednačine

$$(i\partial_\alpha \beta^\alpha - m)\Psi = 0 \tag{1.4}$$

gde su β^μ

$$\beta^0 = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \beta^1 = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \beta^3 = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Jednačina (1.4) sa β-matricama koje su date sa (1.5) je Duffin-Kemer-ova jednačina za čestice spina-0. Direktnom proverom možemo utvrditi da četiri "Kemmer-Duffin-Petiau" matrice zadovoljavaju sledeću algebarsku relaciju:

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu \qquad (\mu,\nu,\rho = 0,1,2,3) \tag{1.6}$$

Uvedimo matricu $\eta = 2\beta^0\beta^0 - 1$

$B \equiv \beta^\alpha\beta_\alpha = \begin{pmatrix} 1&&&&\\ &1&&&\\ &&1&&\\ &&&1&\\ &&&&4 \end{pmatrix}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Vidimo da matrice β_μ i η zadovoljavaju sledeće relacije

$$\beta^*_\mu = -\beta_\mu \qquad \beta^T_\mu = -\beta^\mu$$

$$\beta^+_\mu = \beta^\mu \qquad \eta\beta_\mu = \beta^\mu\eta \tag{1.8}$$

Uvedimo veličinu $\bar{\psi} = \psi^{+}\eta$

Lako je ustanoviti da $\bar{\psi}$ zadovoljava sledeću jednačinu

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\beta^{\mu} + M\bar{\psi} = 0 \tag{1.9}$$

Analognim postupkom, kao i kod Dirac-ovih polja, možemo konstruisati Lagrangian-sku gustinu za slobodna Duffin-Kemmer-ova polja

$$\mathscr{L}(x) = \bar{\psi}(x)\left(i\partial_{\mu}\beta^{\mu} - M\right)\psi(x) \tag{1.10}$$

iz koje standardnim postupkom dobijamo jednačine kretanja za ψ i $\bar{\psi}$ (4.9). Takodje, istim postupkom kao i za Dirac-ova polja dobijamo tenzor energije impulsa i struju verovatnoće

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \pi^{\mu}\partial^{\nu}\psi - g^{\mu\nu}\mathscr{L} = i\bar{\psi}\beta^{\mu}\partial^{\nu}\psi \\ j^{\mu} &= \bar{\psi}\beta^{\mu}\psi \end{aligned} \tag{1.11}$$

Postupajući analogno, moguće je dovesti i jednačinu za vektorsko polje na skup diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \\ \partial^{\nu}F_{\nu\mu} &= m^2 A_{\mu} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Budući da je $F_{\mu\nu}$ antisimetričan tenzor, postoji samo 6 nezavisnih komponenti i to

$$F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 \qquad F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$$

$$F_{20} = \partial_2 A_0 - \partial_0 A_2 \qquad F_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$$

$$F_{30} = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3 \qquad F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$$

dok $\partial^{\nu}F_{\nu\mu} = m^2 A_{\mu}$ daje (1.13)

$$
\begin{aligned}
-\partial_1 F_{10} - \partial_2 F_{20} - \partial_3 F_{30} &= m^2 A_0 \\
\partial_0 F_{01} - \partial_2 F_{21} - \partial_3 F_{31} &= m^2 A_1 \\
\partial_0 F_{02} - \partial_1 F_{12} - \partial_3 F_{32} &= m^2 A_2 \\
\partial_0 F_{03} - \partial_1 F_{13} - \partial_2 F_{23} &= m^2 A_3 .
\end{aligned}
$$

Uzmimo za nove promenljive šest nezavisnih komponenti tenzora $F_{\mu\nu}$ i četiri komponente vektora A_μ. Vidimo da se sistem (1. 8) može napisati u vidu matične jednačine

$$
(i\partial_\mu \beta^\mu - m)\Psi = 0
$$

gde su

$$
\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \\ \Psi_8 \\ \Psi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} F_{10} \\ \frac{1}{m} F_{20} \\ \frac{1}{m} F_{30} \\ \frac{1}{m} F_{23} \\ \frac{1}{m} F_{31} \\ \frac{1}{m} F_{12} \\ A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{1.14}
$$

a β_μ su matrice 10 x 10

$$
\beta^0 = -i \begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\qquad
\beta^1 = -i \begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \tag{1.15}
$$

$$\beta^2 = -i\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c}
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}\right] \qquad
\beta^3 = -i\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc:c}
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-1&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\hdashline
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array}\right]$$

Vidimo da i ove matrice zadovoljavaju relaciju

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\rho + g^{\rho\nu}\beta^\mu$$

Kao i u slučaju Dirac-ovih γ -matrica, da bismo našli broj nezavisnih ireducibilnih reprezentacija algebre date relacijom (1. 6) moramo prvo da nadjemo linearno nezavisne veličine medju matricama β^μ i njihovim proizvodima. Posle nešto komplikovanijeg računa, nego što je račun kod Dirac-ovih matrica, dobijamo da je broj linearno nezavisnih elemenata u toj algebri jednak 126. U sledećm koraku treba naći koliko elemenata ove algebre komutira sa svima drugima. Nadjeno je da ih ima tri: I-jedinična matrica,

$$M = \sum_\mu \eta^\mu - \sum_{\mu<\nu} \eta^\mu\eta^\nu , \qquad N = \eta^0\eta^1\eta^2\eta^3\left(1 - \sum_\mu \eta^\mu\right)$$

Poznato je da broj elemenata koji komutiraju sa svima drugima daje broj neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija, dok totalni broj elemenata mora biti jednak sumi kvadrata dimenzija reprezentacije. Znači da možemo očekivati tri neekvivalentne ireducibilne reperezentacije. Mi smo našli dve: peto-dimenzionalnu i deseto-dimenzionalnu. Iz relacije

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 126$$

nalazimo

$$5^2 + 10^2 + 1^2 = 126$$

Desetodimenzionalna reprezentacija, kao što smo pokazali, opisuje vektorski bozon na način koji je ekvivalentan Proca - teoriji. Petodimenzionalna reprezentacija opisuje pseudoskalarni bozon koji nije ekvivalentan Klein--Gordon-ovom bozonu, jer u Duffin-Kemer-ovom formalizmu bozon ima magnetski moment različit od nule, dat izrazom

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{i}\left(\beta^{\mu}\beta^{\nu} - \beta^{\nu}\beta^{\mu}\right) \tag{1.16}$$

Na prvi pogled možda je iznenadjujuća činjenica da čestica spina-0 ima operator spina čije su svojstvene vrednosti 0, +1, -1.

$$S^{12} = \frac{1}{i}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Pokazaćemo, medjutim, da svojstvene vrednosti ± 1 spinskog operatora nisu merljive. Četvoro-vektor j^{μ} (1.11) se interpretira u teoriji koja nije kvantovana kao gustina struje verovatnoće. Komponenta

$$j^{0} = \rho = \bar{\Psi}\beta^{0}\Psi = \Psi^{+}\eta\beta^{0}\Psi \tag{1.18}$$

je gustina verovatnoće u uobičajenoj statističkoj interpretaciji kvantne mehanike, bazirane na Duffin-Kemmer-ovoj jednačini u smislu jednačine stanja. U petodimenzionalnoj reprezentaciji (1.5)

$$\rho = \Psi^{+}(2\beta^{0}\beta^{0} \overset{?}{\pm} 1)\beta^{0}\Psi = \Psi^{+}\beta^{0}\Psi$$
$$\rho = -i\left(\Psi_{0}^{*}\Psi_{4} - \Psi_{4}^{*}\Psi_{0}\right) \tag{1.19}$$

Koristeći činjenicu da je $\psi_0 = \frac{1}{m}\partial_0\psi_4$ (1.19) postaje

$$\rho = -\frac{i}{m}\left(\dot{\psi}_4^* \psi_4 - \psi_4^* \dot{\psi}_4\right) \tag{1.20}$$

Lako nalazimo da svojstveni vektori operatora S^{12} koji pripadaju svojstvenim vrednostima $\pm$ 1 imaju sledeći oblik

za + 1 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a za - 1 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vidimo da je u oba slučaja $\psi_0 = \psi_4 = 0$. Dakle, gustina verovatnoće (1.19) za stanje sa spinom $\pm$ 1 jednaka je nuli. Ovo je u skladu sa zahtevom da se opiše čestica sa spinom-0.

Budući da se Maxwell-ove jednačine dobijaju iz Proca jednačina stavljajući m = 0, moglo bi da se pomisli da je ta procedura ista i u ovom formalizmu. Ako pogledamo izraz za ψ (1.14) vidimo da ψ nije definisano za m = 0. Ipak uz neke dopunske uslove može se upotrebiti ovaj formalizam [7, 19] i za elektromagnetsko polje.

Navedimo jednačinu koju je dao Harish-Chandra za slučaj Maxwell-ovih jednačina

$$\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - \varepsilon\right)\psi = 0 \tag{1.21}$$

Gde su β^{μ} 10x10 Kemmer-ove matrice a ε je takodje 10x10 matrica koja zadovoljava komutaciona pravila

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \qquad \varepsilon\beta^{\mu} + \beta^{\mu}\varepsilon = \beta^{\mu} \tag{1.22}$$

1.2 Kvantovanje slobodnog skalarnog polja

Posmatrajmo stanje slobodne skalarne čestice sa impulsom $p(p_0, \vec{p})$. Tražimo rešenje Duffin-Kemmer-ove jednačine u obliku ravnog talasa

$$\Psi(x) \sim u(p)e^{-ipx} + v(p)e^{ipx} \tag{1.23}$$

u kome smo razdvojili negativno i pozitivno frekventni deo. Iz jednačine (1.4) sledi da $u(p)$ i $v(p)$ zadovoljavaju sledeće jedančine

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)u(p) &= 0 \\ (-\hat{p} - m)v(p) &= 0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

gde je $\hat{p} = p_\mu \beta^\mu$

Vidimo da se ovaj sistem može napisati kao

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)u(p) &= 0 \\ (\hat{p} - m)u(-p) &= 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Eksplicitan oblik petokomponentnog "spinora" $u(p)$ dobijamo po analogiji sa Dirac-ovim spinorom. Eksplicitan izraz za $u(p)$ kao i za $\bar{u}(p) = u^+(p)\eta$ je:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2M^2}} \begin{pmatrix} -ip^0 \\ ip^1 \\ ip^2 \\ ip^3 \\ M \end{pmatrix} \qquad \bar{u}(p) = \frac{1}{\sqrt{2M^2}} \begin{pmatrix} ip^0 & ip^1 & ip^2 & ip^3 & M \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Primećujemo da je $u^*(p) = u(-p)$

Konstanta uz $u(p)$ je odredjena tako da

$$\bar{u}(p)u(p) = 1$$

Navešćemo još nekoliko vrlo korisnih osobina $u(p)$ i $\bar{u}(p)$

$$\bar{u}(p)u(-p) = 0$$

$$u(p)\,\bar{u}(p) = \frac{1}{2M^2}\hat{p}\,(\hat{p} + M) \tag{1.27}$$

Medju značajnije identitete, koji važe i onda kada spinori u' i u predstavljaju čestice sa različitom masom M' i M, svakako spadaju

$$\bar{u}'(p')u(p) = \frac{1}{2M'M}\left(M'M + p'p\right) \tag{1.28}$$

$$\bar{u}'(p')\beta^{\mu}u(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p'^{\mu}}{M'} + \frac{p^{\mu}}{M}\right) \tag{1.29}$$

Na ovom mestu treba napomenuti da vrlo važnu ulogu u teoriji ima specijalni spinor $\mathcal{U} = u(0)$

Kao i kod Dirac-ovog polja ψ i $\bar{\psi}$ su operatori koji podležu odredjenim kvantnim uslovima. Da bismo pronašli te uslove, razložimo ψ i $\bar{\psi}$ na ravne talase (Fourier-ovo razlaganje)

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2}\left[e^{-ipx}u(p)a_+(p) + e^{ipx}u(-p)a^+_-(p)\right]$$

(1.30)

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2}\left[e^{ipx}\bar{u}(p)a^+_+(p) + e^{-ipx}\bar{u}(-p)a_-(p)\right]$$

Zamenivši ovakav razvoj u izraz za energiju E polja dobićemo komutacione relacije za $a_\pm$, $a^+_\pm$

$$\bar{u}'(p')\beta^{\mu}\beta^{\nu}u(p) = \frac{p'^{\mu}p^{\nu} + g^{\mu\nu}mm'}{2mm'}$$

$$E = \int d^3p \cdot p \left(a_+^+(p) a_+(p) + a_-^+(p) a_-(p) \right) \tag{1.31}$$

S obzirom da ovaj izraz treba da predstavlja zbir energija prisutnih čestica, operatori $a_+(p)$ i $a_-(p)$ moraju da zadovolje sledeće komutacione relacije:

$$\left[a_+(p),\ a_+^+(p') \right] = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')$$
$$\left[a_-(p),\ a_-^+(p') \right] = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \tag{1.32}$$

Ostali komutatori jednaki su nuli.

1.3. Komutatori polja. Propagatori polja

Pošto smo dobili komutacione relacije za kreacione i anihilacione operatore $a_-^+(p), a_+(p)$ i $a_+^+(p), a_-(p)$, možemo izračunati komutacione relacije za operatore polja $\psi(x)$ i $\bar{\psi}(x)$.

$$\left[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\right] = (2\pi)^{-3} \frac{M}{p^0} \int d^3p \left[e^{-ipx} u_\alpha(p) a_+(p) + \right.$$
$$\left. + e^{ipx} u_\alpha(-p) a_-^+(p),\ e^{ipy} \bar{u}_\beta(p) a_+^+(p) + e^{-ipy} \bar{u}_\beta(-p) a_-(p) \right] =$$
$$= (2\pi)^{-3} \frac{M}{p^0} \int d^3p \left\{ e^{-ip(x-y)} \left(u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(p) a_+(p) a_+^+(p) - \bar{u}_\beta(p) u_\alpha(p) a_+^+(p) a_+(p) \right) \right. +$$
$$+ e^{ip(x+y)} \left(u_\alpha(-p) \bar{u}_\beta(p) a_-^+(p) a_+^+(p) - \bar{u}_\beta(p) u_\alpha(-p) a_+^+(p) a_-^+(p) \right) +$$
$$+ e^{-ip(x+y)} \left(u_\alpha(p) \bar{u}_\beta(-p) a_+(p) a_-(p) - \bar{u}_\beta(-p) u_\alpha(p) a_-(p) a_+(p) \right) +$$
$$\left. + e^{ip(x-y)} \left(u_\alpha(-p) \bar{u}_\beta(-p) a_-^+(p) a_-(p) - \bar{u}_\beta(-p) u_\alpha(-p) a_-(p) a_-^+(p) \right) \right\}$$

Koristeći komutacione relacije (1. 32) dobijamo:

$$\left[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)\right] = (2\pi)^{-3} \frac{M}{p^0}\int d^3p \left(e^{-ip(x-y)} u_\alpha(p)\bar{u}_\beta(p) - e^{ip(x-y)} u_\alpha(-p)\bar{u}_\beta(-p)\right)$$

Jednostavnim računom dobijamo da je

$$u_\alpha(p)\bar{u}_\beta(p) = \frac{1}{2M^2}\left[\hat{p}(\hat{p}+M)\right]_{\alpha\beta}$$

$$u_\alpha(-p)\bar{u}_\beta(-p) = \frac{1}{2M^2}\left[\hat{p}(\hat{p}-M)\right]_{\alpha\beta} \qquad (1.33)$$

Zapažamo da ove izraze možemo dobiti iz:

$$i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\, e^{-ipx} = \hat{p}(\hat{p}+M)\, e^{-ipx}$$

$$i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\, e^{ipx} = -\hat{p}(-\hat{p}+M)\, e^{ipx} = \hat{p}(\hat{p}-M)\, e^{ipx} \qquad (1.34)$$

Koristeći se sledećim izrazom za

$$i\Delta(x) = (2\pi)^{-3}\int d^3p\, (2p^0)^{-1}\left(e^{-ipx} - e^{ipx}\right) \qquad (1.35)$$

dobijamo da su komutacione relacije za polje $\Psi(x)$ i $\bar{\Psi}(x)$ sledećeg oblika

$$\left[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(y)\right] = \frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta(x-y) \qquad (1.36)$$

Napišimo i jednovremenske komutacione relacije. Zbog pogodnijeg računa predjimo na komutator:

$$\left[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(0)\right] = \frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta(x) \qquad (1.37)$$

i nadjimo

$$\left[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(c)\right] \delta(x^0)$$

Za ovo izračunavanje pogodnije je da $\Delta(x)$ funkciju napišemo u trodimenzionalnoj Fourier-ovoj reprezentaciji

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin \omega_k x_0}{\omega_k} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k} \qquad (1.38)$$

Prvo ćemo izvesti diferenciranje $\Delta(x)$ funkcije, pa posle uzeti da je $x_o = 0$.

$$\frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\sin \omega_k x_0}{\omega_k} e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3 k =$$

$$= -\hat{\partial}_{\alpha\beta}\Delta(x) - \frac{i}{M}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\beta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\beta^\nu\right]_{\alpha\beta}\Delta(x)$$

Prvi član je za $x_o = 0$ uvek jednak nuli sem kada se uzme izvod po vremenu

$$\left[-\hat{\partial}_{\alpha\beta}\Delta(x)\right]_{x_0=0} = -\beta^0_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x})$$

Drugi član se može bolje srediti:

$$\left[-\frac{i}{M}\left(\partial_0\partial_0\beta_0\beta_0 - \partial_i\partial_0\beta_i\beta_0 - \partial_0\beta_0\partial_i\beta_i + \partial_i\partial_i\beta_i\beta_i\right)_{\alpha\beta}\Delta(x)\right]_{x_0=0}$$

odakle dobijamo

$$\frac{i}{M}\left[\beta^0\beta^i + \beta^i\beta^0\right]_{\alpha\beta}\partial_i\,\delta(\vec{x})$$

Posle sredjivanja dobijamo sledeći izraz za jednakovremenske komutacione relacije

$$\left[\Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(c)\right]\delta(x^0) = \left[-\beta^0 + \frac{i}{M}(\beta^0\beta^i + \beta^i\beta^0)\partial_i\right]_{\alpha\beta}\delta^4(x) \qquad (1.39)$$

Odredimo hronološki proizvod operatora polja

$$T\left(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right) = \theta(x-y)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) + \theta(y-x)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) \qquad (1.40)$$

a zatim nadjimo očekivanu vrednost T-produkta izmedju stanja vakuuma $\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$. Kao što je dobro poznato, odredićemo proizvode $\psi_\alpha(x)$ i $\bar{\psi}_\beta(y)$ i $N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))$ preko $\psi_\alpha^\pm$ i $\bar{\psi}_\beta^\pm$, pa onda uzeti njihovu razliku

$$N(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) - \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) = \left[\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)\right]$$

Izrazimo srednju vrednost, izmedju vakuumskih stanja, ove razlike

$$\langle 0|\left\{N[\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)] - \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\right\}|0\rangle = \left[\bar{\psi}_\beta^+(y), \psi_\alpha^-(x)\right]$$

$$\langle 0|\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = \left[\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\right]$$

Odavde za $\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle$ dobijamo:

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = \theta(x-y)\left[\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\right] + \theta(y-x)\left[\bar{\psi}_\beta^-(y), \psi_\alpha^-(x)\right]$$

gde su

$$\left[\bar{\psi}_\beta^-(y), \psi_\alpha^+(x)\right] = \frac{-i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta^+(x-y)$$

$$\left[\psi_\alpha^-(x), \bar{\psi}_\beta^+(y)\right] = \frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta^-(x-y) \qquad (1.41)$$

Odavde

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle = \theta(x-y)\frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta^-(x-y) +$$

$$+ \theta(y-x)\frac{-i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Delta^+(x-y)$$

Posle izvesnog sredjivanja i diferenciranja θ(x-y) i θ (y-x) dobijamo

$$\langle 0|T(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y))|0\rangle = \frac{i}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M)\right]_{\alpha\beta}\Big\{\theta(x-y)\,\Delta^-(x-y) -$$

$$- \theta(y-x)\,\Delta^+(x-y)\Big\} + \frac{i}{M}\beta^0\hat{\partial}\,\delta(x_0-y_0)\,\Delta(x-y) +$$

$$+ \frac{2i}{M}\beta^0\delta(x_0-y_0)\,\hat{\partial}\Delta(x-y) + \frac{i}{M}(\partial_\nu\partial^\nu+M^2)\Delta_F(x-y) -$$

$$- \frac{i}{M}\delta(x-y)$$

Konačni izraz za propagator skalarne čestice je

$$\langle 0|T(\Psi_\alpha(x)\bar{\Psi}_\beta(y))|0\rangle = i\left[T_F(x-y)\right]_{\alpha\beta} - \frac{i}{M}(1-\beta^0\beta^0)_{\alpha\beta}\,\delta(x-y) \qquad (1.42)$$

gde je

$$T_F(x-y) = \frac{1}{M}\left[i\hat{\partial}(i\hat{\partial}+M) + \partial_\nu\partial^\nu + M^2\right]\Delta_F(x-y) \qquad (1.43)$$

Funkcija $T_F(x-y)$ je upravo funkcija Green-a za jednačinu

$$(i\partial_\nu\beta^\nu - M)\,T_F(x) = \delta(x)$$

Vidimo da se Green-ova funkcija razlikuje od srednje vakuumske vrednosti hronološkog produkta. To je zbog toga što sve komponente operatora polja Ψ(x) nisu dinamički nezavisne.

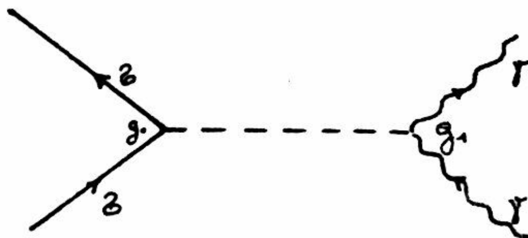
2. ELASTIČNO RASEJANJE FOTONA NA SKALARNOJ ČESTICI

U ovoj glavi razmatraćemo elastično rasejanje fotona na skalarnoj neutralnoj čestici u teoriji perturbacije drugog reda. Smatraćemo da foton ima masu [26, 27] , jer a priori nije jasno kolika bi mogla da bude masa skalarne čestice. Iako su i foton i skalarna čestica neutralni, moguće je konstruisati tok u Duffin-Kemmer-ovom formalizmu. Ove struje su vektori u odnosu na Lorenz-ove transformacije. Imajući u vidu veliki uspeh kvantne elektrodinamike, kao i Weinberg-ov model za slabe interakcije, uzećemo Lagrangian interakcije u obliku struja puta polje. Treba primetiti da iako polje intermedijarnog bozona nije vektorsko, u Duffin-Kemmer-ovom formalizmu postoji mogućnost da od tog polja konstruišemo vektor linearan po ψ. [10]

Prvo ćemo izložiti postupak za dobijanje Hamiltoniana interakcije, i, s tim u vezi, probleme sa kojima se srećemo pri opisivanju Duffin-Kemer-ovih polja u interakcionoj slici. Zatim ćemo pristupiti odredjivanju matričnog elementa i na kraju izračunavanju efikasnog preseka za ovaj proces.

2.1 Interakciona slika

Feynman-ov dijagram za naš proces ima sledeći izgled:



Veličine sa indeksom 0 odnosiće se na skalarnu česticu, sa indeksom 1 na foton, a bez indeksa na česticu koja se razmenjuje.

Napišimo gustinu Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_{int} \qquad (2.1)$$

gde su

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_0 (i\hat{\partial} - M_0)\psi_0 \\ \mathcal{L}_1 &= \bar{\psi}_1 (i\hat{\partial} - m)\psi_1 \\ \mathcal{L}_W &= \bar{\psi} (i\hat{\partial} - M)\psi \end{aligned} \qquad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = &- g_0 :(\bar{\psi}_0 \beta^\mu \psi_0)(\bar{\mathcal{U}} \beta_\mu \psi): - g_0 :(\bar{\psi}_0 \beta^\mu \psi_0)(\bar{\psi} \beta_\mu \mathcal{U}): - \\ &- g_1 :(\bar{\psi}_1 \beta_1^\mu \psi_1)(\bar{\mathcal{U}} \beta_\mu \psi): - g_1 :(\bar{\psi}_1 \beta_1^\mu \psi_1)(\bar{\psi} \beta_\mu \mathcal{U}): \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Zapažemo da je

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \beta^\mu \psi)^+ &= (\psi^+ \eta \beta^\mu \psi)^+ = \psi^+ \beta_\mu \eta \psi = \\ &= \psi^+ \eta \beta^\mu \psi = \bar{\psi} \beta^\mu \psi \end{aligned}$$

Nadjimo jednačine kretanja za polje u interakciji

$$(i\partial_\mu \beta^\mu - M)\psi = g_0 \beta^\mu (\bar{\psi}_0 \beta_\mu \psi)\mathcal{U} + g_1 \beta^\mu (\bar{\psi}_1 \beta_\mu \psi_1)\mathcal{U} \qquad (2.4)$$

Na ovom mestu treba svakako podvući da je gornja jednačina, jednačina kretanja za operatore polja u Heisenberg-ovoj slici. Dok se za proučavanje procesa u interakciji prelazi u interakcionu sliku. U ovoj slici operatori polja imaju isti oblik, tj. zadovoljavaju iste jednačine kao i operatori slobodnih polja. Kod Duffin-Kemmer-ovih polja to nije slučaj. Razlog tome

je postojanje dinamički nezavisnih komponenti. To će biti očigledno ako pomnožimo jednačinu (2. 4) sa (1- $\beta^0\beta^0$)

$$\Psi = \frac{1}{M}\left(i\partial_\mu \beta^\mu \Psi - g_0 \beta^\mu j^{(0)}_\mu \mathcal{U} - g_1 \beta^\mu j^{(1)}_\mu \mathcal{U}\right)$$

$$j^{(0)}_\mu = \overline{\Psi}_0 \beta_{0\mu} \Psi_0 \qquad j^{(1)}_\mu = \overline{\Psi}_1 \beta_{1\mu} \Psi_1 \tag{2. 5}$$

$$(1-\beta^0\beta^0)\Psi = \frac{1}{M}\left[i\partial_\mu (1-\beta_0^2)\beta^\mu \Psi - (1-\beta_0^2)\beta^\mu (g_0 j^{(0)}_\mu + g_1 j^{(1)}_\mu)\right]$$

Koristeći komutacione relacije za β^μ (1. 6) dobijamo da je

$$(1-\beta^0\beta^0)\beta^0 = 0 \qquad \beta^\mu \beta^{02} = (1-\beta^{02})\beta^\mu$$

Tako, (2. 5) postaje

$$(1-\beta^0\beta^0)\Psi = \frac{1}{M}\left[i\partial_k \beta^k \beta^{02} \Psi - \beta^k \beta^{02} \mathcal{U}(g_0 j^{(0)}_\mu + g_1 j^{(1)}_\mu)\right] \tag{2. 6}$$

S obzirom da je

$$\beta^{02} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

izraz (1- $\beta^0\beta^0$) predstavlja projekcioni operator za komponente $\alpha = 1,2,3$

$$(1-\beta^0\beta^0)_{\alpha\beta}\Psi_\beta = \begin{cases} 0 & \alpha = 0,4 \\ \Psi_\alpha & \alpha = 1,2,3 \end{cases}$$

Iz jednačine (2. 6) se vidi da se tri komponente polja (1- $\beta^0\beta^0$)Ψ mogu izraziti preko druge dve $\beta^0\beta^0\Psi$. Ovaj iskaz važi i za interakcionu sliku jer operator S(t) koji je dat kao $\Psi_H = S^{-1}(t)\, \Psi_{int}\, S(t)$ komutira sa ∂_k $k=1,2,3$
Da bismo odredili Hamiltonian samo preko nezavisnih, kanoničnih variabli, iskoristićemo elegantan postupak Ahiezera i Beresteckog [3].

Definišimo novo polje ψ^{s} koje ima iste kanonične komponente kao i ψ_{int}

$$\beta^0\beta^0\Psi_{int} = \beta^0\beta^0\Psi^{s} \tag{2.7}$$

a čije su zavisne komponente definisane preko slobodne Kemmer-ove jednačine

$$(i\hat{\partial} - M)\Psi^{s} = 0$$

Iz jednačina (2. 7) i (2. 6) lako možemo naći vezu izmedju Ψ_{int} i Ψ^{s}

$$\Psi = \Psi^{s} - \frac{g_1}{M}(1-\beta^0\beta^0)\beta^{\mu} j^{(0)}_{\mu}\, U - \frac{g_2}{M}(1-\beta^0\beta^0)\beta^{\mu} j^{(1)}_{\mu}\, U \tag{2.8}$$

Odavde $\mathcal{H}_{int}$ izraženo preko Ψ^{s} [10] ima oblik:

$$\mathcal{H}_{int} = g_0 \bar{U} \hat{j}^{(0)} \Psi^{s} + g_0 \bar{\Psi}^{s} \hat{j}^{(0)} U + g_1 \bar{U} \hat{j}^{(1)} \Psi^{s} + g_1 \bar{\Psi}^{s} \hat{j}^{(1)} U$$

$$- \frac{g_0^2}{M} \bar{U} \hat{j}^{(0)} (1-\beta^0\beta^0) \hat{j}^{(0)} U - \frac{g_1^2}{M} \bar{U} \hat{j}^{(1)} (1-\beta^0\beta^0) \hat{j}^{(1)} U - \tag{2.9}$$

$$- \frac{g_0 g_1}{M} \bar{U} \hat{j}^{(1)} (1-\beta^0\beta^0) \hat{j}^{(0)} \Psi^{s} - \frac{g_0 g_1}{M} \bar{\Psi}^{s} \hat{j}^{(0)} (1-\beta^0\beta^0) \hat{j}^{(1)} U$$

Budući da su zavisne komponente ψ^{s} opisane sa jednačinama za slobodna polja, sve jednačine dobijene u prvoj glavi mogu se primeniti za polje ψ^{s} pa i jednačina za propagator

$$\langle 0 | T(\Psi^{s}_{\alpha}(x) \bar{\Psi}^{s}_{\beta}(y)) | 0 \rangle = i\left[T_F(x-y)\right]_{\alpha\beta} - \frac{i}{M}(1-\beta^0\beta^0)_{\alpha\beta}\, \delta(x-y)$$

Kada se iskoristi perturbaciona teorija [10, 3] članovi po g_0^2, g_1^2 i $g_0 g_1$ u $\mathcal{H}_{int}$ se krate preko drugog člana u propagatoru, tako da se u praktičnom

računu može uzeti da su

$$\langle 0|T(\psi_\alpha^f(x)\bar{\psi}_\beta^f(y)|0\rangle = i\left[T_F(x-y)\right]_{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$$

2.2 Izračunavanje matričnog elementa

U perturbacionoj teoriji S matrica drugog reda ima sledeći oblik

$$S^{(2)} = -\frac{g_0 g_1}{2}\iint dx\,dy\,T\{N(\mathcal{H}_{int}(x))\,N(\mathcal{H}_{int}(y))\} \tag{2.10}$$

Posle zamene $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$ dobijamo

$$S^{(2)} = -\frac{g_0 g_1}{2}\iint dx\,dy\,T\{N[(\bar{\psi}_0\beta_0^\mu\psi_0)_x(\bar{U}\beta_\mu\psi)_x]\,N[(\bar{\psi}_1\beta_1^\nu\psi_1)_y(\bar{\psi}\beta_\nu U)_y]+ \tag{2.11}$$

$$+N[(\bar{\psi}_0\beta_0^\mu\psi_0)_x(\bar{\psi}\beta_\mu U)_x]\,N[(\bar{\psi}_1\beta_1^\nu\psi_1)_y(\bar{U}\beta_\nu\psi)_y]\}$$

Koristeći Wick-ovu teoremu, razvićemo T-produkt na zbir čiji članovi sadrže N-produkte. Od svih članova u ovom razvoju uzimamo samo one, koji sadrže kontrakcije $\underbrace{\psi\bar{\psi}}$ $\underbrace{\bar{\psi}\psi}$.

$$S^{(2)} = -\frac{g_0 g_1}{2}\iint dx\,dy\{N[(\bar{\psi}_0\beta_0^\mu\psi_0)_x(\bar{U}\beta_\mu\underbrace{\psi)_x(\bar{\psi}_1\beta_1^\nu\psi_1)_y(\bar{\psi}}\beta_\nu U)_y]+ \tag{2.12}$$

$$+N[(\bar{\psi}_0\beta_0^\mu\psi_0)_x(\underbrace{\bar{\psi}\beta_\mu U)_x(\bar{\psi}_1\beta_1^\nu\psi_1)_y(\bar{U}\beta_\nu\psi}) _y]\}$$

Ovaj izraz je opštiji nego što je nama potrebno budući da smo zainteresovani za specifični doprinos ovog izraza, imajući u vidu odredjenu konfiguraciju početnog i krajnjeg stanja. To znači da ćemo iz faktora ($\bar{\psi}_0\beta_0^\mu\psi_0$ $)_x$ uzeti samo ($\bar{\psi}_0^+\beta_0^\mu\psi_0^-$ $)_x$ tj. onaj deo koji odgovara datom procesu. Na ovaj

način za $S^{(2)}$ dobijamo sledeći izraz

$$S^{(2)} = -\frac{g_0 g_1}{2} \iint dx\, dy \Big\{ N\big[(\bar{\Psi}_0^{+} \beta_0^{\nu} \Psi_0^{-})_x (\bar{U} \beta_{\nu} \Psi)_x (\bar{\Psi}_1^{+} \beta_1^{\nu} \Psi_1^{-})_y (\bar{\Psi} \beta_{\nu} U)_y\big] + \tag{2.13}$$

$$+ N\big[(\bar{\Psi}_0^{+} \beta_0^{\nu} \Psi_0^{-})_x (\bar{\Psi} \beta_{\nu} U)_x (\bar{\Psi}_1^{+} \beta_1^{\nu} \Psi_1^{-})_y (\bar{U} \beta_{\nu} \Psi)_y\big]\Big\}$$

Napišimo eksplicitno izraze za operatore koji će nam biti potrebni za izračunavanje S-matričnih elemenata

$$\bar{\Psi}^{+}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2} a_-^{+}(p)\, \bar{u}(p)\, e^{ipx}$$

$$\Psi^{+}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2} a_-^{+}(p)\, u(-p)\, e^{ipx}$$

$$\Psi^{-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2} a_+(p)\, u(p)\, e^{-ipx} \tag{2.14}$$

$$\bar{\Psi}^{-}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p \left(\frac{M}{p^0}\right)^{1/2} a_-(p)\, \bar{u}(-p)\, e^{-ipx}$$

$$i\, T_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\hat{q} - M - i\eta}\, e^{iq(x-y)}\, dq$$

Stavimo operatore $\bar{\psi}^{+}$, ψ^{-} i $T_F(x-y)$ u eksplicitnom obliku u izraz $S^{(2)}$ i izvršimo integraciju po dx i dy imajući u vidu poznatu relaciju

$$\int dx\, e^{ipx} = (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p) \tag{2.15}$$

Tada matrični element $S_{fi}^{(2)} = \langle f | S^{(2)} | i \rangle$ ima sledeći oblik

$$S_{fi}^{(2)} = - \frac{i g \cdot g_1}{2(2\pi)^2} \left(\frac{M_0^2 m^2}{p_0 p_0' k_0 k_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p) \beta_\mu^\nu u(p') \bar{u}^e(k) \beta_1^\nu u^e(k') \cdot$$

$$\left[\bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \int \frac{1}{\hat{q} - M - i\eta} dq \, \beta_\nu \mathcal{U} \, \delta(q + p - p') \delta(k - k' - q) + \right. \qquad (2.16)$$

$$\left. + \bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \int \frac{1}{\hat{q} - M - i\eta} dq \, \beta_\nu \mathcal{U} \, \delta(p - p' - q) \delta(k - k' + q) \right]$$

Izvršimo inegraciju po dq

$$S_{fi}^{(2)} = - \frac{i g \cdot g_1}{2(2\pi)^2} \left(\frac{M_0^2 m^2}{p_0 p_0' k_0 k_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p) \beta_\mu^\nu u(p') \cdot \bar{u}^e(k) \beta_1^\nu u^e(k')$$

$$\cdot \left[\bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \frac{1}{(p_\varrho' - p_\varrho)\beta^\varrho - M - i\eta} \beta_\nu \mathcal{U} \, \delta(k - k' + p - p') + \right. \qquad (2.17)$$

$$\left. + \bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \frac{1}{(p_\gamma - p_\gamma')\beta^\gamma - M - i\eta} \beta_\nu \mathcal{U} \, \delta(k - k' + p - p') \right]$$

Posle sredjivanja gornjeg izraza dobijamo

$$S_{fi}^{(2)} = - \frac{i g \cdot g_1}{2(2\pi)^2} \left(\frac{M_0^2 m^2}{p_0 p_0' k_0 k_0'} \right)^{1/2} \bar{u}(p) \beta_\mu^\nu u(p') \cdot \bar{u}^e(k) \beta_1^\nu u^e(k') \cdot A \, \delta(k - k' + p - p')$$

gde je

$$A = \bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \frac{1}{(p_\varrho' - p_\varrho)\beta^\varrho - M - i\eta} \beta_\nu \mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}} \beta_\nu \frac{1}{(p_\gamma - p_\gamma')\beta^\gamma - M - i\eta} \beta_\nu \mathcal{U}$$

Iskoristimo sada identitet (1. 29)

$$S_{fi}^{(2)} = - \frac{i g \cdot g_1}{8(2\pi)^2} \frac{1}{(E_p E_{p'} E_k E_{k'})^{1/2}} (p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu) \delta(k - k' + p - p') A \qquad (2.18)$$

2.3 Efikasni presek

Imajući u vidu smisao operatora S, zaključujemo da veličina $|S_{fi}|^2$ predstavlja totalnu verovatnoću prelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$. Dakle, veličina

$$|S^{(2)}_{fi}|^2 = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^4} \frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}} \left[\delta(k-k'+p-p')\right]^2 \cdot$$
$$\cdot (p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu) \cdot (p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) |A|^2 \qquad (2.19)$$

predstavlja totalnu verovatnoću prelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$ u teoriji perturbacije drugog reda. Jednu od δ-funkcija možemo da napišemo kao

$$(2\pi)^4 \delta(P) = \int e^{iPx} dx \qquad (2.20)$$

i uzevši $P = 0$, što je u skladu sa drugom δ-funkcijom, dobijamo $\int dx$. Rezultujući integral $\int dx$ predstavlja totalnu prostorno-vremensku zapreminu. Izraz (2.19) možemo da pišemo kao

$$|S^{(2)}_{fi}|^2 = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^8} \frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}} \delta(k-k'+p-p') (p^\mu + p'^\mu) \cdot$$
$$\cdot (k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) |A|^2 \int dx \qquad (2.21)$$

Deljenjem $|S^{(2)}_{fi}|^2$ sa $\int dx$ dobijamo verovatnoću prelaza po jedinici zapremine u jedinici vremena

$$w_{fi} = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^8} \frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}} \delta(k-k'+p-p') \cdot$$
$$\cdot (p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) |A|^2 \qquad (2.22)$$

2.3 Efikasni presek

Imajući u vidu smisao operatora S, zaključujemo da veličina $|S_{fi}|^2$ predstavlja totalnu verovatnoću prelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$. Dakle, veličina

$$|S_{fi}^{(2)}|^2 = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^4}\,\frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}}\left[\delta(k-k'+p-p')\right]^2\cdot$$
$$\cdot(p^\mu+p'^\mu)(k^\nu+k'^\nu)\cdot(p^{\mu'}+p'^{\mu'})(k^{\nu'}+k'^{\nu'})|A|^2 \qquad (2.19)$$

predstavlja totalnu verovatnoću prelaza iz stanja $|i\rangle$ u stanje $|f\rangle$ u teoriji perturbacije drugog reda. Jednu od δ-funkcija možemo da napišemo kao

$$(2\pi)^4\,\delta(P) = \int e^{iPx}\,dx \qquad (2.20)$$

i uzevši P = 0, što je u skladu sa drugom δ-funkcijom, dobijamo $\int dx$. Rezultujući integral $\int dx$ predstavlja totalnu prostorno-vremensku zapreminu. Izraz (2.19) možemo da pišemo kao

$$|S_{fi}^{(2)}|^2 = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^8}\,\frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}}\,\delta(k-k'+p-p')\,(p^\mu+p'^\mu)\cdot$$
$$\cdot(k^\nu+k'^\nu)(p^{\mu'}+p'^{\mu'})(k^{\nu'}+k'^{\nu'})|A|^2\int dx \qquad (2.21)$$

Deljenjem $|S_{fi}^{(2)}|^2$ sa $\int dx$ dobijamo verovatnoću prelaza po jedinici zapremine u jedinici vremena

$$w_{fi} = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^8}\,\frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}}\,\delta(k-k'+p-p')\cdot$$
$$\cdot(p^\mu+p'^\mu)(k^\nu+k'^\nu)(p^{\mu'}+p'^{\mu'})(k^{\nu'}+k'^{\nu'})|A|^2 \qquad (2.22)$$

Jednačina (2.22) daje verovatnoću prelaza u odredjeno finalno stanje $|f\rangle$. Medjutim, u praksi nas ne interesuje prelaz u stanje sa precizno odredje- nim momentom, već prelaz u stanja koja su bliska ovom stanju. Interesuje nas takav prelaz u kome će skalarna čestica imati moment u oblasti (p', p' + dp') a vektorska (k', k' + dk'). Broj ovih stanja jednak je

$$\frac{V^2 d^3p' d^3k'}{(2\pi)^6} = \frac{V d^3p'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{V d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{2.23}$$

Kombinujući jednačine (2.22) i (2.23) dobijamo za verovatnoću prelaza po jedinici vremena i po jedinici zapremine

$$dw = \frac{g_0^2 g_1^2 V^2}{64(2\pi)^{14}} \frac{1}{E_p E_{p'} E_{k'} E_k} \delta(k - k' + p - p')(p^{\mu} + p'^{\mu}) \cdot$$
$$\cdot (k^{\nu} + k'^{\nu})(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) |A|^2 d^3p' d^3k' \tag{2.24}$$

Da bismo se oslobodili δ-funkcije posmatrajmo proces u sistemu centra inercije

$$E = E_p + E_k = E_{p'} + E_{k'}$$
$$\vec{p} = -\vec{k} \equiv \vec{p} \qquad \vec{p}' = -\vec{k}' \equiv \vec{p}'$$

$$dw = \frac{g_0^2 g_1^2 V^2}{64(2\pi)^{14}} \frac{1}{E_p E_{p'} E_k E_{k'}} \delta(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{p} - \vec{p}')\, \delta(E_p + E_k - E_{p'} - E_{k'}) \cdot \tag{2.25}$$
$$\cdot (p^{\mu} + p'^{\mu})(k^{\nu} + k'^{\nu})(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) |A|^2 d^3p' d^3k'$$

Prva δ-funkcija nestaje integracijom po d^3k'

$$\int \delta(\vec{k} - \vec{k}' + \vec{p} - \vec{p}')\, d^3k' \rightarrow 1$$

a drugi diferencijal d^3p' zamenjujemo sledećim izrazom

$$d^3p' = \vec{p}'^2 d|\vec{p}'| d\Omega = |\vec{p}'| d\Omega \frac{E_{p'}E_{k'} d(E_{p'}+E_{k'})}{E_{p'}+E_{k'}}$$

Poslednja jednakost sledi iz sledećih relacija:

$$\vec{p}'^2 = E_{p'}^2 - m_1^2 = E_{k'}^2 - m_2^2$$

$$2|\vec{p}|d\vec{p} = 2E_{p'}dE_{p'} = 2E_{k'}dE_{k'}$$

$$d|\vec{p}'| = \frac{E_{p'}E_{k'}dE_{p'}}{E_{k'}|\vec{p}|} = \frac{E_{k'}E_{p'}dE_{k'}}{E_{p'}|\vec{p}|} = \frac{E_{k'}E_{p'}d(E_{p'}+E_{k'})}{(E_{p'}+E_{k'})|\vec{p}|}$$

Zamenimo d^3p' u izraz za verovatnoću (2.25)

$$dw = \frac{g_0^2 g_1^2 V^2}{64(2\pi)^{14}} \delta(E_p+E_k-E_{p'}-E_{k'}) \frac{1}{E_pE_{p'}E_{k'}E_k}$$

$$\cdot \frac{E_{k'}E_{p'}d(E_{p'}+E_{k'})}{E_{p'}+E_{k'}} |\vec{p}'| d\Omega \cdot (p^{\mu}+p'^{\mu})(k^{\nu}+k'^{\nu})(p^{\mu'}+p'^{\mu'})(k^{\nu'}+k'^{\nu'})|A|^2 \qquad (2.26)$$

i posle integracije po $d(E_{p'}+E_{k'})$ dobijamo:

$$dw = \frac{g_0^2 g_1^2 V^2}{64(2\pi)^{14}} \frac{1}{E_pE_k} \frac{|\vec{p}'|}{E_{p'}+E_{k'}} (p^{\mu}+p'^{\mu}) \cdot$$

$$\cdot (k^{\nu}+k'^{\nu})(p^{\mu'}+p'^{\mu'})(k^{\nu'}+k'^{\nu'})|A|^2 d\Omega \qquad (2.27)$$

Diferencijalni presek se dobija kada dw podelimo sa veličinom

$$j = \frac{I}{VE_pE_k}$$

gde je

$$I = \sqrt{(pk)^2 - M_0^2 m^2}$$

U sistemu centra inercije ($\vec{p} = -\vec{k} = \vec{p}$)

$$I = |\vec{p}|\,(E_p + E_k)$$

tako da

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V}\left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_k}\right) = \frac{v_p + v_k}{V}$$

što se poklapa sa običnim odredjivanjem gustine fluksa ulaznih čestica.

Na taj način za diferencijalni presek dobijamo sledeći izraz:

$$d\sigma = \frac{g_0^2 g_1^2 V^4}{64(2\pi)^4}\,\frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|E^2}(p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'})|A|^2 d\Omega \qquad (2.28)$$

Prepišimo ovu formulu u drugom obliku uvodeći invarijantnu veličinu

$$t = (p - p')^2 = M_0^2 + M_0^2 - 2(pp') =$$

$$= 2M_0^2 - 2E_p E_{p'} + 2|\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta$$

gde je θ ugao izmedju $\vec{p}$ i $\vec{p}'$

$$dt = 2|\vec{p}||\vec{p}'|\,d\cos\theta$$

U jednačini (2.28) zamenjujemo

$$d\Omega = -d\varphi\, d\cos\theta = \frac{d\varphi\, dt}{2|\vec{p}||\vec{p}'|}$$

i dobijamo

$$d\sigma = \frac{g_0^2 g_1^2}{64(2\pi)^2}|A|^2 (p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'})\frac{dt}{I^2}\,\frac{d\varphi}{2} \qquad (2.29)$$

S obzirom da presek ne zavisi od azimuta φ , pišemo

$$d\sigma = \frac{g_0^2 g_1^2}{64\cdot 4\pi}|A|^2 (p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'})\frac{dt}{I^2} \qquad (2.30)$$

Za izračunavanje $|A|^2$ postoje dva načina: jedan, standardan preko tragova, vrlo glomazan, pa ćemo ga izložiti u kratkim crtama u prilogu. Drugi, elegantan i zasniva se na osobinama specijalnih spinora $\bar{\mathcal{U}}$ i $\mathcal{U}$. Ovaj drugi ćemo detaljno izložiti.

Matrica A ima sledeći oblik:

$$A = \bar{\mathcal{U}}\left[\beta_\mu \frac{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_\nu + \beta_\nu \frac{\hat{q}(\hat{q}-M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_\mu\right]\mathcal{U} \tag{2.31}$$

gde je

$$\hat{q} = (p'^\gamma - p^\gamma)\beta_\gamma$$

a

$$\frac{1}{\hat{q}-M} = \frac{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}$$

Da bismo izbegli izračunavanje tragova, analizirajmo prvi član matrice A

$$\bar{\mathcal{U}}\beta_\mu\{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2\}\beta_\nu\mathcal{U} =$$

$$= \bar{\mathcal{U}}\beta_\mu\hat{q}\cdot\hat{q}\beta_\nu\mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}}\beta_\mu\hat{q}M\beta_\nu\mathcal{U} + \bar{\mathcal{U}}\beta_\mu(M^2-q^2)\beta_\nu\mathcal{U}$$

Nadjimo eksplicitne izraze za sva tri člana, koristeći (1.5) i (1.26)

$$\bar{\mathcal{U}}\beta_0 = \frac{i}{\sqrt{2}}(10000)\ ;\quad \bar{\mathcal{U}}\beta_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(01000)\ ;\quad \bar{\mathcal{U}}\beta_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(00100)\ ;\quad \bar{\mathcal{U}}\beta_3 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(00010)$$

$$\beta_0\mathcal{U} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\quad \beta_1\mathcal{U} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\quad \beta_2\mathcal{U} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\quad \beta_3\mathcal{U} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Kombinujući ove relacije lako je zaključiti da su:

$$\bar{\mathcal{U}}\beta_\mu\hat{q}\hat{q}\beta_\nu\mathcal{U} = \frac{1}{2}q^\mu q^\nu \qquad \bar{\mathcal{U}}\beta_\mu\hat{q}M\beta_\nu\mathcal{U} = 0 \tag{2.32}$$

$$\bar{\mathcal{U}}\beta_\mu(M^2-q^2)\beta_\nu\mathcal{U} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(M^2-q^2)$$

Tada se matrica A može pisati kao:

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}(q^2-M^2)}{M(q^2-M^2)} + \frac{1}{2}\,\frac{q_\nu q_\mu - g_{\nu\mu}(q^2-M^2)}{M(q^2-M^2)}$$

$$A = \frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}(q^2-M^2)}{M(q^2-M^2)}$$

Izračunajmo $|A|^2$

$$|A|^2 = \frac{q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}(q^2-M^2)}{M(q^2-M^2)} \cdot \frac{q_{\mu'} q_{\nu'} - g_{\mu'\nu'}(q^2-M^2)}{M(q^2-M^2)}$$

$$|A|^2 = \frac{1}{M^2(q^2-M^2)^2}\Big[q_\mu q_\nu q_{\mu'} q_{\nu'} - g_{\mu\nu} q_{\mu'} q_{\nu'}(q^2-M^2) - g_{\mu'\nu'} q_\mu q_\nu (q^2-M^2) + g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} (q^2-M^2)^2\Big] \qquad (2.33)$$

Nadjimo sada diferencijalni presek:

$$d\sigma = \frac{g_0^2 g_1^2}{64 \cdot 4\pi}(p^\mu + p'^\mu)(k^\nu + k'^\nu)(p^{\mu'} + p'^{\mu'})(k^{\nu'} + k'^{\nu'}) \cdot$$

$$\cdot\Big[q_\mu q_\nu q_{\mu'} q_{\nu'} - g_{\mu\nu} q_{\nu'} q_{\mu'}(q^2-M^2) - g_{\mu'\nu'} q_\mu q_\nu (q^2-M^2) + g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'}(q^2-M^2)^2\Big]\,\frac{dt}{M^2(q^2-M^2)^2 I^2} \qquad (2.34)$$

Imajući u vidu da je

$$q_\mu = (p'_\mu - p_\mu) \qquad p^2 = p'^2 = M_0^2 \qquad k^2 = k'^2 = m^2$$

posle kraćeg računa dobijamo

$$d\sigma = \frac{g_0^2 g_1^2}{64\cdot 4\pi}\left(p^{\mu}+p^{\prime\mu}\right)\left(k^{\nu}+k^{\prime\nu}\right)\left(p^{\mu'}+p^{\prime\mu'}\right)\left(k^{\nu'}+k^{\prime\nu'}\right) g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} \frac{dt}{M^2 I^2}$$

(2.35)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{g_0^2 g_1^2}{64\cdot 4\pi M^2 I^2}\left(p^{\mu} k_{\nu} + p^{\prime\mu} k_{\mu} + p^{\mu} k'_{\nu} + p^{\prime\nu} k'_{\mu}\right)^2$$

Izrazimo diferencijalni presek preko invarijantnih veličina:

$$s = (k+p)^2 = (k'+p')^2$$

$$t = (k-k')^2 = (p-p')^2$$

$$u = (k-p')^2 = (p-k')^2 \qquad (2.36)$$

$$s+t+u = 2M_0^2 + 2m^2$$

Posle kraćeg računa dobijamo da je

$$(pk + p'k + pk' + p'k')^2 = (s-u)^2 = (2s+t-2M_0^2-2m^2)^2$$

Zamenimo gornji izraz u (2.35)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{g_0^2 g_1^2}{64\cdot 4\pi M^2 I^2}\left(2s+t-2M_0^2-2m^2\right)^2 \qquad (2.37)$$

I^2 možemo izraziti preko S

$$I^2 = \frac{1}{4}\left[s-(M_0+m)^2\right]\left[s-(M_0-m)^2\right]$$

Tada (2.37) postaje

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{g_0^2 g_1^2}{64\pi}\,\frac{(2s+t-2M_0^2-2m^2)^2}{M^2\left[s-(M_0+m)^2\right]\left[s-(M_0-m)^2\right]} \qquad (2.38)$$

3. ZAKLJUČAK

Da bi bolje uočili zavisnost diferencijalnog preseka $\frac{d\sigma}{dt}$ od veličina koje su dostupne posmatranju predjimo na $\frac{d\sigma}{dT}$ gde je $T = E - E'$ razlika energija ulaznog i izlaznog fotona.

Nadjimo vezu izmedju t i T

$$t = (p - p')^2 = (p_o - p'_o)^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 \tag{3.1}$$

U laboratorijskom sistemu važe sledeće relacije

$$\vec{p} = 0 \qquad p_o = E_o = M_o \tag{3.2}$$

Onda (3.1) prelazi u

$$t = (M_o - E'_o)^2 - (-\vec{p}')^2 \tag{3.3}$$

Napišimo zakon održanja energije

$$E + M_o = E' + E'_o \tag{3.4}$$

Kombinujući (3.4), (3.3) i $E'_o = \vec{p}'^2 + M_o^2$ dobijamo za t

$$t = -2M_oT \quad \text{gde je } T = E - E' \tag{3.5}$$

Izvršimo smenu promenljivih u (2.38) i uzmimo u obzir da su mase fotona i skalarne čestice jako male u poredjenju sa kvadratom energije sistema

$$\frac{d\sigma}{2M_o dT} = \frac{g_2^2 g_1^2}{64\pi M^2} \frac{(2S - 2M_oT)^2}{S^2} \tag{3.6}$$

Invarijantu S takodje treba izraziti u laboratorijskom sistemu.

$$S = (p + k)^2 = (p_o + k_o)^2 - (\vec{p} + \vec{k})^2 \tag{3.7}$$

Posle kraćeg računa, sličnog onom za t, uzevši u obzir da su mase m i M_o jako male dobijamo

$$S = 2M_oE \tag{3.8}$$

Zamenimo (3. 8) u (3. 6)

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{g_0^2 g_1^2 2M_0}{64\pi M^2}\,\frac{(4M_0E - 2M_0T)^2}{4M_0^2E^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{g_0^2 g_1^2 2M_0}{64\pi M^2}\,\frac{16M_0^2E^2 - 16M_0ET + 4M_0^2T^2}{4M_0^2E^2} \tag{3.9}$$

Budući da u posmatranom procesu $t \rightarrow 0$ (uslov A), a samim tim i $T \rightarrow 0$, zatim i M_o je jako malo, u (3. 9) možemo zanemariti izraz 4 $^2_o T^2$. Tada (3. 9) postaje

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{g_0^2 g_1^2 2M_0}{64\pi M^2}\,\frac{16M_0^2E(E-T)}{4M_0^2E^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{g_0^2 g_1^2 M_0}{8\pi M^2}\,\frac{E-T}{E} \tag{3.10}$$

Nadjimo totalni efikasni presek

$$\sigma_t = \frac{g_0^2 g_1^2 M_0}{8\pi M^2}\int_0^E \frac{E-T}{E}\,dT$$

$$\sigma_t = \frac{g_0^2 g_1^2 M_0}{16\pi M^2}E \tag{3.11}$$

Nadjimo sada relativni energetski gubitak pri prolazu fotona kroz "more" skalarnih čestica. Prvo treba naći srednji energetski gubitak po sudaru $\langle T \rangle$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\sigma_t}\int T\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)dT \tag{3.12}$$

Tada, ako je $\rho_\varphi(\tau)$ gustina skalarnih čestica koje susreće foton duž svog puta, onda je

$$\frac{dE}{dr} = - \rho_\psi(r)\,\sigma_t \langle T \rangle \frac{E}{E} \tag{3.13}$$

odakle

$$\frac{dE}{E} = - \rho_\psi(r)\,\sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E}\, dr \tag{3.14}$$

Energetski gubitak kod crvenog pomaka iznosi

$$\delta z = \frac{\delta \nu}{\nu} = - \sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E} \int \rho_\psi(r)\, dr \tag{3.15}$$

i ne bi trebalo da zavisi od energije. Nadjimo zbog toga veličinu $\sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E}$

$$\sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E} = \frac{1}{E} \int T \left(\frac{d\sigma}{dT} \right) dT$$

$$\sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E} = \frac{1}{E} \int_0^E T\, k\, \frac{E-T}{E}\, dT \tag{3.16}$$

Posle integracije

$$\sigma_t \frac{\langle T \rangle}{E} = \frac{k}{6} E \tag{3.17}$$

Stavivši (3.17) u (3.15) dobijamo da $\delta z = \frac{\delta \nu}{\nu}$ zavisi linearno od energije što nije u saglasnosti sa eksperimentom.

Uporedimo naše rezultate sa rezultatima J. P. Vigier-a [26] i pokušajmo da objasnimo izvore neslaganja.

Njihov Hamiltonian je:

$$H = \lambda\, \Psi_4^+(p_4')\, \tilde{S}^{\mu\nu}\, \Psi_4(p_4)\, \Delta_4\, \Phi_\gamma^+(p_\gamma')\, \beta_\nu\, q_\nu\, \Phi_\gamma(p_\gamma) \tag{3.18}$$

Modifikovana verzija Hamiltoniana koji su predložili Bethe [28] Clark i Pedigo [29] za neutrino-elektron rasejanje.

Iz takvog Hamiltoniana dobijaju diferencijalni efikasni presek

$$\frac{d\sigma}{dT} = k' \frac{E-T}{ET} \tag{3.19}$$

iz koga kasnije dobijaju konstantan relativan energetski gubitak po sudaru.

Uporedimo (3.19) i (3.10). Vidimo da naš izraz (3.10) prelazi u (3.19) deljenjem sa T .

Zašto se u našem izrazu ne pojavljuje t u imenitelju? Ako pogledamo strukturu matričnog elementa (2.18) zapažamo da se t može pojaviti jedino u A. Matrica A ima sledeći oblik (2.31)

$$A = \bar{u}\left[\beta_\mu \frac{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_\nu + \beta_\nu \frac{\hat{q}(\hat{q}-M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_\mu\right]u$$

gde je (1.43)

$$\frac{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)} = T_F(q) \tag{3.20}$$

propagator skalarne čestice u Duffin-Kemmer-ovom formalizmu. Od svih članova iz (2.31) doprinos daje jedino član (2.32)

$$\bar{u}\beta_\mu(M^2-q^2)\beta_\nu u = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(M^2-q^2)$$

Tako, da od cele matrice A ostaje samo

$$\frac{1}{2M} g_{\mu\nu}$$

Iz ovog razmatranja možemo zaključiti da se nigde u imenitelju ne može javiti t. Ako sada pogledamo rad [26] zapažamo da su J. P. Vigier i grupa autora za propagator skalarne čestice uzeli $\Delta_4 \sim \frac{1}{t}$ što i jeste propagator skalarne čestice ali u Klein-Gordon-ovom formalizmu a ne u

formalizmu u kome rade. Ovakva aproksimacija je razlog što se u izrazu za diferencijalni presek (3.19) pojavljuje u imenitelju t koje mi ne dobijamo. Ako bismo u izrazu za A (2.31) umesto $T_F(q)$ (3.2) uzeli $\frac{1}{t}$ dobili bismo iste rezultate kao u [26]. Medjutim, takav postupak nam se ne čini ničim opravdan.

DODATAK

A. Budući da se u računima često sreću tragovi matrica, naćićemo tragove β matrica.

Uvedimo projektivne operatore P i $\overline{P}$ koji projektuju na skalarni i vektorski deo petodimenzionalnog prostora

$$P+\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

$$P^2 = P \qquad \overline{P}^2 = \overline{P} \qquad \overline{P}P = P\overline{P} = 0 \qquad P+\overline{P} = I$$

Projektivne matrice P i $\overline{P}$ povezane su sa β matricama

$$P\beta^{\mu} + \beta^{\mu}P = \overline{P}\beta^{\mu} + \beta^{\mu}\overline{P} = \beta^{\mu}$$

$$\beta^{\mu}P = \overline{P}\beta^{\mu} \qquad P\beta^{\mu}P = \overline{P}\beta^{\mu}\overline{P} = 0$$

$$\beta^{\mu}\overline{P} = P\beta^{\mu} \qquad \beta^{\mu}\beta^{\nu}\overline{P} = \overline{P}\beta^{\mu}\beta^{\nu} \tag{A.2}$$

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}P = P\beta^{\mu}\beta^{\nu} \qquad P\beta^{\mu}\beta^{\nu}\overline{P} = \overline{P}\beta^{\mu}\beta^{\nu}P = 0$$

Nije teško videti da

$$P\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}P = \overline{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\overline{P} = 0$$
$$(n = 2k+1) \tag{A.3}$$

$$P\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P} = \bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}P = 0 \qquad (n = 2k) \tag{A. 4}$$

Budući da važe (A. 3) i (A. 4), možemo pisati

$$\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n} = P\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P} + \bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}P \qquad (2k+1 = n) \tag{A. 5}$$

$$\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n} = P\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}P + \bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P} \qquad (n = 2k) \tag{A. 6}$$

Iz (A. 5), imajući u vidu osobine tragova

$$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)\ ; \quad P\bar{P} = \bar{P}P = 0$$

dobijamo

$$Tr\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\} = Tr\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P}P\} + Tr\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}P\bar{P}\} = 0 \qquad (n = 2k+1) \tag{A. 7}$$

tj. trag proizvoda neparnog broja matrica β_μ jednak je nuli.

Kada je n -parno relaciju (A. 6) možemo pisati

$$Tr\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\} = Tr\{\beta^{\mu_n}P\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_{n-1}}\bar{P}\} +$$

$$+ Tr\{\bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P}\} = Tr\{\bar{P}\beta^{\mu_n}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_{n-1}}\bar{P}\} +$$

$$+ Tr\{\bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\bar{P}\} =$$

$$= Tr\left\{(\bar{P}\beta^{\mu_n}\beta^{\mu_1}\bar{P})(\bar{P}\beta^{\mu_2}\beta^{\mu_3}\bar{P})\cdots(\bar{P}\beta^{\mu_{n-2}}\beta^{\mu_{n-1}}\bar{P})\right\} +$$

$$+ Tr\left\{(\bar{P}\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\bar{P})(\bar{P}\beta^{\mu_3}\beta^{\mu_4}\bar{P})\cdots(\bar{P}\beta^{\mu_{n-1}}\beta^{\mu_n}\bar{P})\right\} \qquad (A.8)$$

Pri dobijanju (A. 8) iskoristili smo osobine β^{μ}-matrica, P i $\bar{P}$

$$\beta^{\mu}P = \bar{P}\beta^{\mu}, \quad \beta^{\mu}\bar{P} = P\beta^{\mu}, \quad \bar{P}\beta^{\mu}\beta^{\nu} = \beta^{\mu}\beta^{\nu}\bar{P}, \quad \bar{P}^2 = \bar{P}$$

Za slučaj petodimenzionalnih β^{μ} matrica, izrazivši ove matrice preko elemenata potpune matrične algebre

$$\beta^{\mu} = \varepsilon^{4,\mu} + \varepsilon^{\mu,4} \qquad \mu = 0,1,2,3$$

dobijamo

$$\bar{P}\beta^{\mu}\beta^{\nu}\bar{P} = \varepsilon^{\mu,\nu} \qquad (A.9)$$

$$Tr\left\{\bar{P}\beta^{\mu}\beta^{\nu}\bar{P}\right\} = Tr\left\{\varepsilon^{\mu,\nu}\right\} = g^{\mu\nu} \qquad (A.10)$$

Iz (A. 8) dobijamo

$$Tr\left\{\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\cdots\beta^{\mu_n}\right\} = g^{\mu_n\mu_1}g^{\mu_2\mu_3}\cdots g^{\mu_{n-2}\mu_{n-1}} +$$

$$+ g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\cdots g^{\mu_{n-1}\mu_n} \qquad (A.11)$$

B. Pošto smo izveli relacije za tragove β matrica možemo pristupiti izračunavanju kvadrata amplitude $|A|^2$ za rasejanje fotona na skalarnoj čestici.

Matrica A (2. 31) ima sledeći oblik:

$$A = \bar{u}\left[\beta_{\mu}\frac{\hat{q}(\hat{q}+M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_{\nu} + \beta_{\nu}\frac{\hat{q}(\hat{q}-M)-q^2+M^2}{M(q^2-M^2)}\beta_{\mu}\right]u \qquad (B.1)$$

gde je

$$\hat{q} = (p'^{\nu} - p^{\nu})\beta_{\nu}$$

a

$$\frac{1}{\hat{q} - M - i\epsilon} = \frac{\hat{q}(\hat{q}+M) - q^2 + M^2}{M(q^2 - M^2 - i\epsilon)}$$

Napišimo jednačinu (B.1) kao

$$A = \bar{U} Q_{\mu\nu} U$$

gde je

$$Q_{\mu\nu} = \beta_{\nu} \frac{\hat{q}(\hat{q}+M) - q^2 + M^2}{M(q^2 - M^2)} \beta_{\nu} + \beta_{\nu} \frac{\hat{q}(\hat{q}-M) - q^2 + M^2}{M(q^2 - M^2)} \beta_{\mu}$$

Onda je kvadrat modula $|A|^2$ dat izrazom

$$|A|^2 = (\bar{U}_{\alpha} Q_{\alpha\beta} U_{\beta})^* (\bar{U}_{\alpha} Q_{\alpha\beta} U_{\beta}) =$$
$$= (\bar{U}_{\rho} \bar{Q}_{\rho\tau} U_{\tau})(\bar{U}_{\alpha} Q_{\alpha\beta} U_{\beta})$$
$$\bar{Q} = \eta Q^{+} \eta$$

Pr...edimo gornji izraz

$$|A|^2 = \bar{Q}_{\rho\tau} (U\bar{U})_{\tau\alpha} Q_{\alpha\beta} (U\bar{U})_{\beta\rho} =$$
$$= (\bar{Q}U \cdot \bar{U} Q U \cdot \bar{U})_{\rho\rho}$$

ili:

$$|A|^2 = Tr(\bar{Q}U \cdot \bar{U} Q U \cdot \bar{U}) = Tr(QU \cdot \bar{U} \bar{Q} U \cdot \bar{U})$$

Posle kraćeg računa konstatujemo da je

$$\bar{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$$

a da se proizvod $U\bar{U}$ može izraziti preko β-matrica

$$U\bar{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}(1 - \beta_0\beta_0 + \beta_i\beta_i)$$

Konačan izraz za $|A|^2$ ima sledeći oblik

$$|A|^2 = \frac{1}{36}\frac{1}{M^2(q^2-M^2)^2}\, Tr\left[Q'_{\mu\nu}(1-\beta_0\beta_0+\beta_i\beta_i)\,Q'_{\nu\mu}(1-\beta_0\beta_0+\beta_i\beta_i)\right]$$

gde je

$$Q' = M(q^2-M^2)Q$$

Imajući u vidu da je trag proizvoda β matrica jednak:

$$Tr\,\beta^{\mu_1}\beta^{\mu_2}\beta^{\mu_3}\cdots\beta^{\mu_n} = \begin{cases} 0 & n\text{-neparno} \\ g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4}\cdots g^{\mu_{n-1}\mu_n} + g^{\mu_1\mu_n}g^{\mu_2\mu_3}\cdots g^{\mu_{n-2}\mu_{n-1}} & n\text{-parno} \end{cases}$$

dobijamo za $|A|^2$ posle dužeg i glomaznog računa

$$|A|^2 = \frac{1}{36}\frac{1}{M^2(q^2-M^2)^2}\Big[36\, q_\mu q_\nu q_{\mu'} q_{\nu'} + 36\, g_{\mu\nu}\, g_{\mu'\nu'}(M^2-q^2)^2 +$$

$$+ 36\, g_{\mu'\nu'}\, q_\mu q_\nu (M^2-q^2) + 36\, g_{\mu\nu}\, q_{\mu'} q_{\nu'}(M^2-q^2)\Big]$$

Vidimo da nam se ovako dobijeni $|A|^2$ slaže sa izrazom (2.33).

REFERENCE

1. R. J. Duffin, Phys. Rev. 54, 1114 (1938)
2. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. (London) A 173, 91 (1939)
3. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецвий, Квантовая Электродинамика, Москва 1959
4. P. Roman, Theory of Elementary Particles, North-Holand 1960.
5. P. Roman, Introduction to Quantum Field Theory, John Wiley and Sons 1969.
6. H. Umezawa, Quantum Field Theory, North-Holand 1956.
7. А.А.Богуш, Л.Г.Мороз, Введение в теорию классичесних полей, Минск 1968
8. Ю.В.Новожилов, Введение в теорию элементарных частиц Москва 1972
9. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва 1973
10. N. G. Deshpand, P. C. McName, Phys. Rev. D 5, 1389 (1972)
11. F. Booth and A. H. Wilson, Proc. Roy. Soc. (London) A 175, 483 (1940)
12. A. H. Wilson, Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 363 (1940)
13. E. Fischbach, F. Iachello, A. Lande Phys. Rev. Letters 26, 1200 (1971)
14. F. Mandl, Introduction to Quantum Field Theory, New York 1966.
15. G. Källen, Elementary Particle Physics, Addison-Wesley 1964.
16. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Релативистская квантовая теория - Москва 1959
17. A. Klein, Phys. Rev. 82, 639 (1951)
18. E. Fischbach, M. M. Nieto, C. K. Scott, J. Math. Phys. 14, 1761 (1973)
19. Harich-Chandra, Proc. Roy. Soc. (London) A 186, 502 (1946)
20. N. G. Deshpande and P. C. McNamee, Phys. Rev. D5, 1012 (1972)
21. M. Schein, D. M. Haskin and M. C. Glasser, Phys. Rev. 95 855 (1954)
22. A Debendetti, C. M. Garelli, L. Tallone and M. Vigone, Nuovo Cimento 2, 220 (1955)
23. M. Koshiba and M. F. Kaplan, Phys. Rev. 100, 327 (1955)
24. L. Barbanti Silva, C. Bonacini, G. Depietri, I. Fori, G. Lovera, R. Perilli Fedeli and A. Roveri, Nuovo Cimento 3 1465 (1956)

25. G. B. Collins, J. R. Ficebec, D. M. Stevens, W. P. Trower, Phys. Rev. D6 (1973)

26. T. Jaakkkola, M. Moles, J. C. Pecker, J. P. Vigier, Cosmological implications of anomalous redshifts (u pripremi za štampu)

27. L. de Broglie, Mecanique ondulatoire du photon et Theorie quantique des champs, Paris 1949.

28. H. A. Bethe , Proc. Camb. Philos. Soc. 31, 108 (1935)

29. R. B. Clark and R. D. Pedigo, Phys. Rev. D8 2261 (1973)